

# Interpolation polynômiale

Said EL HAJJI

Université Mohammed V - Agdal.  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques et Informatique

Laboratoire de Mathématiques, Informatique et Applications  
- Rabat

<http://www.fsr.ac.ma/mia/>

# Outline

- 1 Introduction
- 2 Une méthode directe basée sur la résolution d'un système linéaire:
- 3 Une méthode itérative : Méthode de Lagrange
  - Interpolation Linéaire :
  - Interpolation parabolique
  - Interpolation de Lagrange
- 4 Interpolation Itérée de Newton-Côtes
- 5 Erreur d'Interpolation polynomiale :

# Outline

- 1 Introduction
- 2 Une méthode directe basée sur la résolution d'un système linéaire:
- 3 Une méthode itérative : Méthode de Lagrange
  - Interpolation Linéaire :
  - Interpolation parabolique
  - Interpolation de Lagrange
- 4 Interpolation Itérée de Newton-Côtes
- 5 Erreur d'Interpolation polynomiale :

# Outline

- 1 Introduction
- 2 Une méthode directe basée sur la résolution d'un système linéaire:
- 3 Une méthode itérative : Méthode de Lagrange
  - Interpolation Linéaire :
  - Interpolation parabolique
  - Interpolation de Lagrange
- 4 Interpolation Itérée de Newton-Côtes
- 5 Erreur d'Interpolation polynomiale :

# Outline

- 1 Introduction
- 2 Une méthode directe basée sur la résolution d'un système linéaire:
- 3 Une méthode itérative : Méthode de Lagrange
  - Interpolation Linéaire :
  - Interpolation parabolique
  - Interpolation de Lagrange
- 4 Interpolation Itérée de Newton-Côtes
- 5 Erreur d'Interpolation polynomiale :

# Outline

- 1 Introduction
- 2 Une méthode directe basée sur la résolution d'un système linéaire:
- 3 Une méthode itérative : Méthode de Lagrange
  - Interpolation Linéaire :
  - Interpolation parabolique
  - Interpolation de Lagrange
- 4 Interpolation Itérée de Newton-Côtes
- 5 Erreur d'Interpolation polynomiale :

# Introduction

Nous abordons dans ce chapitre un nouveau type de problème, faisant intervenir la notion d'approximation d'une fonction.

## Exemples :

1) D'après la Formule de Taylor à l'ordre 5 de la fonction  $\sin(x)$ , on a :

$$\forall x \in \text{Vois}(0), \sin(x) \simeq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \sin^{(6)}(\xi) \frac{x^6}{6!}$$

L'erreur commise serait de l'ordre de  $\sin^{(6)}(\xi) \frac{x^6}{6!}$  Ainsi :

- Si  $N = 3$ ,  $\sin(0.1) = (0.1) - \frac{(0.1)^3}{3!} = 9.9833 \times 10^{-2}$
- Si  $N = 5$ ,  $\sin(0.1) = 0.1 - \frac{(0.1)^3}{3!} + \frac{(0.1)^5}{5!} = 9.9833 \times 10^{-2}$

Avec le logiciel Maple on a :  $\sin(0.1) = 9.9833 \times 10^{-2}$

# Introduction

2) Avec les cours d'analyse I et II, on ne connaît pas d'expression explicite de  $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$

Cependant d'après :

- La formule du trapèze  $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx \simeq \frac{f(0)+f(1)}{2} = \frac{1+e^{-1}}{2} = 0.68394$
- La formule de Simpson :  $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx \simeq \frac{1}{6} [f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1)] = \frac{1}{6} (1 + 4e^{-\frac{1}{4}} + e^{-1}) = 0.74718$

Avec le Logiciel Maple, on a :  $\int_0^1 e^{-x^2} dx = 0.74682$

# Introduction

On ne connaît pas à ce niveau du cours l'expression explicite de l'erreur.

La notion d'approximation d'une fonction consiste à remplacer un **problème donné** par un **problème voisin**.

La question fondamentale serait de savoir la qualité de cette approximation.

# Introduction

## Remarque:

En pratique la fonction  $f$  est connue explicitement, ou seulement par ses valeurs en quelques points.

La notion **d'interpolation polynomiale** est la façon la plus simple d'obtenir une telle approximation.

## Théorème :

Soit  $f$  une fonction continue dans  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , alors pour tout  $\epsilon > 0$  donné, il existe un polynôme  $P_n$  de degré  $n$  tel que

$$\text{Max}_{x \in [a, b]} |f(x) - P_n(x)| < \epsilon$$

# Introduction

- 1 L'interpolation polynomiale est un outil pour la construction des méthodes d'intégration numérique ou des méthodes d'approximation des équations différentielles.
- 2 L'interpolation par les fonctions splines est largement utilisée dans tous les programmes de dessin assisté par ordinateur, conception assistée par ordinateur ou plus généralement de graphisme.
- 3 Les séries de Fourier et leur analogue discret, la transformation de Fourier discrète : Elles sont un moyen très utile pour l'approximation des fonctions périodiques.

# Introduction

## Remarque:

- Pour les équations aux dérivées partielles, la méthode des éléments finis, un des outils de base de l'ingénierie moderne, utilise de façon essentielle l'interpolation multi-dimensionnelle
- Une façon naturelle d'approcher les fonctions périodiques est d'utiliser les polynômes trigonométrique.

# Introduction

Nous allons nous limiter à l'introduction de l'interpolation Polynomiale. Elle consiste à déterminer un polynôme  $P_n(x)$  de degré  $n$  qui puisse remplacer lors des applications la fonction  $f(x)$ .

De plus, c'est un outil efficace pour :

- Calculer, pour  $x$  donné, une approximation de  $f(x)$  en calculant  $P_n(x)$
- Construire :
  - 1 des méthodes d'intégration numérique
  - 2 des méthodes de différentiation
  - 3 des méthodes d'approximation des équations différentielles
  - 4 ...

# Introduction

Le principe est simple, le procédé est le suivant :

- On choisit (ou on se donne)  $(n + 1)$  points  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .
- On calcule  $y_0 = f(x_0), \dots, y_n = f(x_n)$   
ou on se donne  $(x_i, y_i), i = 0, \dots, n$ .
- On cherche un polynôme de degré  $n$  tel que  $P_n(x_i) = y_i,$   
 $i = 0, \dots, n$ .

# Introduction

## Remarque:

- 1 Les points  $(x_i, y_i)_{i=0,n}$  sont appelés points d'interpolation.
- 2 Si la fonction  $f$  est connue seulement par ses valeurs en quelques points, les  $(n + 1)$  points  $x_0, x_1, \dots, x_n$  sont fixés..
- 3 Si on veut que  $P_m(x_i) = f(x_i)$  et  $P'_m(x_i) = f'(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ , on obtient l'interpolation dite d'Hermite

# Introduction

Il existe plusieurs techniques pour calculer  $P_n(x)$ . Les plus connues sont celles de **Lagrange et de Newton-Côtes**. Nous allons en fait le faire des deux façons :

- 1 Une méthode directe basée sur la résolution d'un système linéaire
- 2 Une méthode itérative due à Lagrange.

Nous terminerons ce chapitre par :

- 1 Une brève discussion sur l'erreur d'interpolation polynomiale
- 2 Une brève description du principe de la méthode itérée de Newton-Côtes

# Méthode directe

- On se donne  $(n + 1)$  points  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .
- On calcule  $y_0 = f(x_0), \dots, y_n = f(x_n)$ .
- On cherche un polynôme de degré  $n$  tel que  $P_n(x_i) = y_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

Écrivons explicitement  $P_n(x_i) = y_i$ .

$$a_n x_i^n + a_{n-1} x_i^{n-1} + \dots + a_1 x_i + a_0 = y_i, \quad i = 0, \dots, n$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

# Méthode directe

Matrice de type Vandermonde. Son déterminant est

$$\det = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$$

On a  $\det \neq 0$  si tous les  $x_i$  sont distincts. On peut donc trouver un unique vecteur de coefficients  $(a_n, \dots, a_0)$  résolvant le problème.

# Outline

- 1 Introduction
- 2 Une méthode directe basée sur la résolution d'un système linéaire:
- 3 Une méthode itérative : Méthode de Lagrange**
  - Interpolation Linéaire :**
  - Interpolation parabolique
  - Interpolation de Lagrange
- 4 Interpolation Itérée de Newton-Côtes
- 5 Erreur d'Interpolation polynomiale :

# Interpolation Linéaire

On considère deux points  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  avec :

$$\begin{cases} x_0 \neq x_1 \\ y_0 = f(x_0) \text{ et } y_1 = f(x_1). \end{cases}$$

Pour déterminer le polynôme  $P_1(x) = ax + b$  qui passe par deux points distincts  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  ( $x_0 \neq x_1$ ). On peut:

1) Résoudre le système d'équations:

$$\begin{cases} ax_0 + b = y_0 \\ ax_1 + b = y_1 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ b = y_0 - ax_0 = \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} \end{cases}$$

On a :

$$P_1(x) = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}x + \left(\frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0}\right)$$

et

$$P_1(x_0) = y_0 \text{ et } P_1(x_1) = y_1$$

2) Poser

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

On a :

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 P_1(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) \\
 &= y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) \\
 &= \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} x + \left( \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} \right)
 \end{aligned}$$

On a :

$$P_1(x_0) = y_0 \text{ et } P_1(x_1) = y_1$$

car

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

# Interpolation Linéaire

Ces deux procédés déterminent évidemment le même polynôme de degré 1 (la même droite).

Si maintenant, on veut déterminer le polynome de degré 2 qui passe par trois (3) points distincts alors:

- i) la première expression de  $P_1(x)$  est inadéquate (il faut refaire les calculs)
- ii) la deuxième expression se prête assez facilement à une généralisation par récurrence.

# Interpolation Linéaire

## Exemple :

Déterminer le polynôme d'interpolation  $P_1(x)$  de degré 1 tel que

$$P_1(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1$$

avec  $y_i = f(x_i)$   $i = 0, 1$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 1)$ ,  $(x_1, y_1) = (2, 5)$

D'après la méthode de Lagrange,

$$\begin{aligned} P_1(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) \\ &= y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \\ &= 1 \frac{(x - 2)}{(0 - 2)} + 5 \frac{(x - 0)}{(2 - 0)} \\ &= 1 \frac{(x - 2)}{(-2)} + 5 \frac{(x)}{(2)} = 2x + 1 \end{aligned}$$

# Outline

- 1 Introduction
- 2 Une méthode directe basée sur la résolution d'un système linéaire:
- 3 Une méthode itérative : Méthode de Lagrange**
  - Interpolation Linéaire :
  - Interpolation parabolique**
  - Interpolation de Lagrange
- 4 Interpolation Itérée de Newton-Côtes
- 5 Erreur d'Interpolation polynomiale :

# Interpolation parabolique

On considère trois points  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  avec :

$$\begin{cases} x_0 \neq x_1, \text{ et } x_0 \neq x_2 \text{ et } x_1 \neq x_2 \\ y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1) \text{ et } y_2 = f(x_2). \end{cases}$$

Pour déterminer le polynôme  $P_2(x)$  de degré 2, d'équation  $y = ax^2 + bx + c$  qui passe par trois points distincts  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$ , il suffit de poser:

# Interpolation parabolique

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

On a :

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

# Interpolation parabolique

Ainsi

$$\begin{aligned}
 P_2(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) \\
 &= y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \\
 &\quad y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \\
 &\quad y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}
 \end{aligned}$$

est le polynôme d'interpolation polynomiale associé.

# Interpolation parabolique

## Exemple :

Déterminer le polynôme d'interpolation  $P_2(x)$  de degré 2 tel que

$$P_2(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1 \text{ et } 2$$

avec  $y_i = f(x_i)$   $i = 0, 1$  et  $2$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 1)$ ,  $(x_1, y_1) = (1, 2)$  et  $(x_2, y_2) = (2, 5)$

# Interpolation parabolique

D'après la méthode de Lagrange,

$$\begin{aligned}
 P_2(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) \\
 &= y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \\
 &+ y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\
 &= 1 \frac{(x - 1)(x - 2)}{(-1)(-2)} + 2 \frac{(x)(x - 2)}{(1)(-1)} + 5 \frac{(x)(x - 1)}{(2)(1)} \\
 &= 1 \frac{(x - 1)(x - 2)}{2} + 2 \frac{(x)(x - 2)}{-1} + 5 \frac{(x)(x - 1)}{(2)(1)} \\
 &= x^2 + 1
 \end{aligned}$$

# Interpolation parabolique

## Remarque:

- 1 Pour calculer  $P_2(x)$ , on n'a pas utilisé le polynôme  $P_1(x)$  calculé dans l'exemple précédent et pourtant on avait deux points communs.
- 2  $L_i(x)$ ,  $i = 0, 1, 2$  sont des polynômes de degré 2 :
  - $L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$
  - $L_1(x) = \frac{(x)(x-2)}{(1)(-1)} = -x(x-2) = -x^2 + 2x$
  - $L_2(x) = \frac{(x)(x-1)}{(2)(1)} = \frac{1}{2}x(x-1) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$

# Outline

- 1 Introduction
- 2 Une méthode directe basée sur la résolution d'un système linéaire:
- 3 Une méthode itérative : Méthode de Lagrange**
  - Interpolation Linéaire :
  - Interpolation parabolique
  - Interpolation de Lagrange**
- 4 Interpolation Itérée de Newton-Côtes
- 5 Erreur d'Interpolation polynomiale :

# Interpolation de Lagrange

- On choisit  $n + 1$  points  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .
- On calcule  $y_0 = f(x_0), \dots, y_n = f(x_n)$ .
- On cherche un polynôme de degré  $n$  tel que  $P_n(x_i) = y_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

On introduit les coefficients d'interpolation de Lagrange.

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

$$L_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^{j=n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

$L_k(x)$  est un polynôme de degré  $n$ ,

# Interpolation de Lagrange

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

Donc

$$P(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x)$$

est un polynôme de degré  $n$  qui vérifie bien  $P(x_i) = y_i$

# Interpolation de Lagrange

**Propriété** : Le Polynôme d'interpolation polynomiale est unique.

En effet si  $P(x)$  et  $Q(x)$  sont deux polynômes d'interpolation alors :

$P(x) - Q(x)$  est un polynôme de degré  $n$  pour lequel

$$P(x_i) - Q(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n.$$

Ce polynôme de degré  $\leq n$  ayant  $n + 1$  racines, il est identiquement nul.

# Interpolation de Lagrange

## Exemple :

On suppose que  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  et que

$(x_0, y_0) = (0, 0)$ ,  $(x_1, y_1) = (1, 1)$  et  $(x_2, y_2) = (8, 2)$

1) Déterminer le polynôme  $P_2(x)$  d'interpolation polynomiale qui passent par les points  $(x_i, y_i)_{i=0,2}$

# Interpolation de Lagrange

D'après la méthode de Lagrange,

$$\begin{aligned}
 P_2(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) \\
 &= y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \\
 &\quad + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\
 &= 0 \frac{(x - 1)(x - 2)}{(0 - 1)(0 - 2)} + 1 \frac{(x - 0)(x - 8)}{(1 - 0)(1 - 8)} + 2 \frac{(x - 0)(x - 1)}{(8 - 0)(8 - 1)} \\
 P_2(x) &= 1 \frac{x(x - 8)}{-7} + 2 \frac{x(x - 1)}{56} = -\frac{3}{28}x^2 + \frac{31}{28}x
 \end{aligned}$$

# Interpolation de Lagrange

On a bien  $P_2(0) = 0$ ,  $P_2(1) = 1$  et  $P_2(8) = -\frac{3}{28}(8)^2 + \frac{31}{28}8 = 2$

2) Calculer  $P_2(x)$  et  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  pour  $x = 0.5, 0.95, 1, 1.5$  et  $3$ .

On a :

| $x$  | $f(x)$  | $P_2(x) = -\frac{3}{28}x^2 + \frac{31}{28}x$ |
|------|---------|--|
| 0.5  | 0.7937  | 0.52679                                      |
| 0.95 | 0.98305 | 0.95509                                      |
| 1    | 1       | 1  |
| 1.5  | 1.1447  | 1.4196                                       |
| 3    | 1.4422  | $\frac{33}{14} = 2.3571$                     |

# Interpolation de Lagrange

## Remarque :

1) En pratique, on utilise l'interpolation polynomiale avec des polynômes de degré  $n$  assez grand ou l'interpolation polynomiale par morceaux. Ainsi dans l'exemple précédent, il faut augmenter le nombre de points d'interpolations.

2) Si les valeurs  $y_k$  sont des valeurs expérimentales.

L'interpolation polynomiale est une technique peu appropriée pour de telles situations. Les polynômes de degré élevé sont sensibles à la perturbation des données.

# Interpolation de Lagrange

3) La méthode de Lagrange s'adapte mal au changement du nombre de points  $(x_i, y_i)_i$ . On ne peut utiliser les coefficients de Lagrange si on passe de  $n$  à  $(n + 1)$  points.

4) **Phénomène de RUNGE** (fonction de Runge) : L'interpolation polynômiale ne fournit pas une bonne approximation de la fonction  $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ . Si on augmente le nombre de points d'interpolation le resultat devient plus mauvais.

## Interpolation Itérée de Newton-Côtes

- On choisit  $n + 1$  points  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .
- On calcule  $y_0 = f(x_0), \dots, y_n = f(x_n)$ .
- On cherche un polynôme de degré  $n$  tel que  $P_n(x_i) = y_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

L'Interpolation Itérée de Newton-Côtes est un procédé itératif qui permet de calculer le polynôme d'interpolation  $P_n(x)$  de degré  $n$  basé sur  $(n + 1)$  points  $(x_i, y_i)_{i=0,n}$  à partir du polynôme d'interpolation  $P_{(n-1)}(x)$  de degré  $(n - 1)$  basé sur  $n$  points  $(x_i, y_i)_{i=0,(n-1)}$ , en posant :

$$P_n(x) = P_{(n-1)}(x) + C(x), \quad n \geq 1$$

# Interpolation Itérée de Newton-Côtes

avec

$$C(x) = a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{(n-1)})$$

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{(k-1)})(x_k - x_{(k+1)})\dots(x_k - x_n)}$$

Les coefficients  $a_n$  sont appelés différences divisées d'ordre  $n$  de la fonction  $f$ , on note :

$$a_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

# Interpolation Itérée de Newton-Côtes

- On appelle "différence divisée d'ordre 0 de  $f$  en un point  $x$ ":

$$f[x] = f(x)$$

- Différence "divisée d'ordre 1 de  $f$  en  $x$  et  $y$ ":

$$f[x, y] = \frac{f[x] - f[y]}{x - y}$$

on a

$$f[x, y] = \frac{f(x)}{x - y} + \frac{f(y)}{y - x}$$

# Interpolation Itérée de Newton-Côtes

- Différence "divisée d'ordre 2 de  $f$  en  $x, y$  et  $z$ ":

$$\begin{aligned}
 f[x, y, z] &= \frac{f[x, y] - f[y, z]}{x - z} \\
 &= \frac{f(x)}{(x - y)(x - z)} + \frac{f(y)}{(y - x)(y - z)} \\
 &\quad + \frac{f(z)}{(z - x)(z - y)}
 \end{aligned}$$

et plus généralement:

$$f[x_1, x_2, \dots, x_n] = \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (x_i - x_k)}$$

# Interpolation Itérée de Newton-Côtes

## Remarque:

Les différences divisées sont indépendants de l'ordre des points.

Quel est le lien entre  $f(x)$  et les différences divisées?

Soit  $x$  un point autre que les  $n + 1$  points  $x_i, i = 1, \dots, n$ . On a

$$f[x, x_0] = \frac{f(x) - f[x_0]}{x - x_0}$$

d'où

$$f(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x, x_0]$$

# Interpolation Itérée de Newton-Côtes

mais comme

$$f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x, x_0] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}$$

alors

$$f(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] - (x - x_0)(x - x_1) f[x, x_0, x_1]$$

en continuant ainsi de proche en proche on obtient:

$$\begin{aligned} f(x) &= f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] \\ &+ \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) f[x_0, \dots, x_n] + \\ &(x - x_0) \dots (x - x_n) f[x, x_0, \dots, x_n] \end{aligned}$$

# Interpolation Itérée de Newton-Côtes

on vérifie que

$$f(x) = P_n(x) + L(x)f[x, x_0, \dots, x_n]$$

où  $P_n(x)$  est un polynôme de degré  $n$  tel que  $P_n(x_i) = f(x_i)$ , pour  $i = 0, \dots, n$ . C'est donc le polynôme d'interpolation de Lagrange, on l'appelle le polynôme de Newton.

# Erreur d'Interpolation polynomiale

L'erreur commise lors d'une interpolation est une question fondamentale en analyse numérique:

- elle renseigne à priori sur la nature de cette erreur
- elle fournit des informations sur les termes qui y participent
- elle permet d'avoir un ordre de grandeur de l'erreur commise.

# Erreur d'Interpolation polynomiale

## Théorème :

Soient  $f$  une fonction de classe  $C^{n+1}$  dans  $I$  et ,  $(x_i)_{i=0,n}$   $(n+1)$  points distincts dans  $I$  avec  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$

Alors pour tout  $x \in [x_0, x_n]$ , il existe  $\zeta = \zeta(x)$  tel que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} L(x)$$

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x)$$

$$L_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}$$

# Erreur d'Interpolation polynomiale

## Remarque :

1) Cette formule montre que :

i) l'erreur est nulle pour  $x = x_i$  i.e.  $x$  est un point d'interpolation.

ii) l'erreur dépend de la fonction considérée ( de  $f^{(n+1)}$ ) et des points d'interpolations  $(x_i)_i$ .

2) Cette formule d'erreur permet de trouver des formules d'erreur pour l'intégration numérique et la différentiabilité numérique.

## Erreur d'Interpolation polynomiale

Dans le cas de l'erreur d'interpolation à partir de la forme de Newton, on a :

$$f(x) - P_n(x) = L(x).f[x, x_0, \dots, x_n].$$

Comme on a la même fonction  $f$  selon les mêmes points  $x_i$  pour  $i = 0, \dots, n$ , il s'agit de deux formes du même polynôme, et l'erreur d'interpolation est la même, d'où

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} L(x) = L(x).f[x, x_0, \dots, x_n].$$

# Erreur d'Interpolation polynomiale

## Exemple :

Déterminer l'erreur d'interpolation polynomiale dans le cas de l'interpolation parabolique

On approche la fonction  $f(x)$  par la parabole passant par les points  $(x_0, y_0) = (0, 1)$ ,  $(x_1, y_1) = (1, 2)$  et  $(x_2, y_2) = (2, 5)$ .

Le polynôme d'interpolation  $P_2(x)$  de degré 2 tel que

$$P_2(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1 \text{ et } 2$$

avec  $y_i = f(x_i)$   $i = 0, 1$  et  $2$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 1)$ ,  $(x_1, y_1) = (1, 2)$  et  $(x_2, y_2) = (2, 5)$

# Erreur d'Interpolation polynomiale

D'après la méthode de Lagrange,

$$\begin{aligned}P_2(x) &= y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) \\&= 1 \frac{(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)} + 2 \frac{(x)(x-2)}{(1)(-1)} + 5 \frac{(x)(x-1)}{(2)(1)} \\&= x^2 + 1\end{aligned}$$

# Erreur d'Interpolation polynomiale

D'après le théorème précédent,

$$\begin{aligned} f(x) - P_2(x) &= \frac{f^{(3)}(\zeta)}{3!} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= \frac{f^{(3)}(\zeta)}{3!} x(x - 1)(x - 2) \end{aligned}$$

Si  $|f^{(3)}(x)| \leq M$  alors

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 2], \quad |f(x) - P_2(x)| & \\ |f(x) - P_2(x)| &\leq \frac{M}{6} |x(x - 1)(x - 2)| \\ &\leq \frac{M}{6} x(x - 1)(x - 2) \end{aligned}$$